

ΘΕΜΑ 1 (3 M)

A. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx$ χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς

$x = u, y = uv$. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με τον απευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος. **(1.5 M)**

B. Το χωρίο που κείται εντός της καρδιοειδούς καμπύλης $r = 1 + \cos \theta$ και εκτός του κύκλου $r = 1$ είναι η βάση ενός στερεού ορθού κυλίνδρου. Η άνω πλευρά του κυλίνδρου είναι στο επίπεδο $z = x$. Βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου. **(1.5 M)**

Δίνεται η τριγωνομετρική ταυτότητα $2 \cos^2 \phi = 1 + \cos 2\phi$.

ΘΕΜΑ 2 (2 M)

Με την βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange να βρεθεί το ακρότατο της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$ επί της τομής των επιπέδων $x + y + z = 4$ και $x + y - z = 0$.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 M)

A. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ και

να γραφεί μια διαγωνοποίησή του. Τι ιδιότητα έχουν τα ιδιοδιανύσματα του A; **(1.5 M)**

B. Εξηγήστε γιατί οι πίνακες A^n , όπου n θετικός ακέραιος, είναι μη-αντιστρέψιμοι. **(1.0 M)**

ΘΕΜΑ 4 (2.5 M)

A. Να επιλυθεί με την μέθοδο απαλειφής Gauss το παρακάτω ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$x + 2y + z + w = 0$$

$$2x + y + z + w = 0.$$

$$5x + 4y + 3z + 3w = 0$$

Στην συνέχεια βρείτε μια βάση για τον διανυσματικό χώρο των λύσεων του συστήματος. **(1.25 M)**

B. Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ από τα διανύσματα $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ και $(2,0,1)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt. Ποιες είναι οι προβολές του διανύσματος $(2,1,2)$ στην βάση που κατασκευάσατε; **(1.25 M)**

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1

A

Από τον απευθείας υπολογισμό θα έχουμε

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} [\ln |x|]_1^2 = \frac{3}{2} [\ln 2 - \ln 1] = \frac{3}{2} \ln 2$$

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

$$\text{Η Ιακωβιανή θα είναι } J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

$$\text{Και } f(x, y) = \frac{y}{x} = \frac{uv}{u} = v = g(u, v)$$

Επίσης μας συμφέρει το εξωτερικό ολοκλήρωμα να είναι ως προς u ($1 \leq u \leq 2$) και το εσωτερικό ως προς v θεωρώντας το u σταθερό ($y_{\min}/u \leq v \leq y_{\max}/u \Rightarrow 1/u \leq v \leq 2/u$).

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx &= \int_1^2 \int_{1/u}^{2/u} g(u, v) |J(u, v)| dv du = \int_1^2 \int_{1/u}^{2/u} v u dv du \\ &= \int_1^2 u \left[\frac{v^2}{2} \right]_{1/u}^{2/u} du = \int_1^2 u \left[\frac{3}{2u^2} \right] du = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{3}{2} [\ln |u|]_1^2 = \frac{3}{2} [\ln 2 - \ln 1] = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και χωρίς την χρήση της Ιακωβιανής δεδομένου ότι $x = u \Rightarrow dx = du$ και για σταθερό u :

$$\left. \begin{matrix} u = \text{const} \\ y = uv \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} u = \text{const} \\ dy = u dv \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} u = \text{const} \\ dv = dy/u \end{matrix} \right\} \text{ και άρα}$$

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx = \int_1^2 \int_{1/u}^{2/u} g(u, v) (u dv) du = \int_1^2 \int_{1/u}^{2/u} v u dv du = \dots = \frac{3}{2} \ln 2$$

B

Σε πολικές συντεταγμένες το επίπεδο

$$z = x = r \cos \theta$$

Άρα για αν βρούμε τον όγκο που μας ζητείται πρέπει να ολοκληρώσουμε την παραπάνω συνάρτηση στο χωρίο που ορίζει η καρδιοειδής καμπύλη με τον κύκλο. Τα όρια ολοκλήρωσης είναι $0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 1 + \cos \theta$

Άρα ο όγκος είναι το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_1^{1+\cos\theta} (r \cos \theta)(r dr d\theta) &= \int_0^{2\pi} \int_1^{1+\cos\theta} r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^{1+\cos\theta} \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \theta)^3 - 1] \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [1 + 3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta - 1] \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi + \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^{2\pi} \right] = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d(\sin \theta) = \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta] d(\sin \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d(\sin \theta) - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d(\sin \theta) = [\sin \theta]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(3\pi + 2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι $\pi + \pi/2 = 3\pi/2$

Αν δουλεύαμε στις 3 διαστάσεις και χρησιμοποιούσαμε κυλινδρικές συντεταγμένες τότε η τρίτη μεταβλητή θα έπαιρνε τιμές $0 \leq z \leq x = r \cos \theta$ και όγκος θα ήταν

$$\iiint dV = \int_0^{2\pi} \int_1^{1+\cos\theta} \int_0^{r\cos\theta} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{1+\cos\theta} r^2 \cos \theta dr d\theta$$

που είναι το ολοκλήρωμα που υπολογίσαμε και παραπάνω.

ΘΕΜΑ 2

Από την πρώτη περιοριστική συνθήκη $x + y + z = 4$ ορίζουμε την συνάρτηση $g_1(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0$. Από την δεύτερη περιοριστική συνθήκη $x + y - z = 0$ θα έχουμε $g_2(x, y, z) = x + y - z = 0$.

θα εφαρμόζουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Θα έχουμε $\vec{\nabla} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\hat{i} + f_y(x, y, z)\hat{j} + f_z(x, y, z)\hat{k} = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$

Και $\vec{\nabla} g_1(x, y, z) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ και $\vec{\nabla} g_2(x, y, z) = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

Πρέπει

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \lambda \vec{\nabla} g_1(x, y, z) + \mu \vec{\nabla} g_2(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda + \mu \\ xz = \lambda + \mu \\ xy = \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{\lambda + \mu}{z} \\ x^2 = y^2 = \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\lambda + \mu}{\pm \sqrt{\lambda - \mu}} \\ x = y = \pm \sqrt{\lambda - \mu} \end{cases}$$

Υπάρχουν δύο τρόποι τώρα επίλυσης του προβλήματος

ΤΡΟΠΟΣ 1

Από την δεύτερη περιοριστική συνθήκη θα έχω

$$g_2(x, y, z) = x + y - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{\lambda - \mu} - \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{\lambda - \mu}} = 0 \\ \text{ή} \\ -2\sqrt{\lambda - \mu} - \frac{\lambda + \mu}{-\sqrt{\lambda - \mu}} = 0 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $\pm \sqrt{\lambda - \mu}$ θα έχω και στις δυο περιπτώσεις

$$\Rightarrow 2(\lambda - \mu) - (\lambda + \mu) = 0 \Rightarrow \lambda = 3\mu$$

$$\text{Άρα θα έχω } \begin{cases} z = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{\lambda - \mu}} \\ x = y = \sqrt{\lambda - \mu} \\ \lambda = 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{4\mu}{\sqrt{2\mu}} \\ x = y = \sqrt{2\mu} \\ \lambda = 3\mu \end{cases}$$

Από την πρώτη περιοριστική συνθήκη θα έχω

$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2\mu} + \frac{4\mu}{\sqrt{2\mu}} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4\mu + 4\mu = 4\sqrt{2\mu} \Rightarrow 2\mu = \sqrt{2\mu} \Rightarrow 4\mu^2 = 2\mu \Rightarrow 4\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

Άρα τοπικό ακρότατο θα έχω για
$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\mu}{\sqrt{2\mu}} \\ x = y = \sqrt{2\mu} \\ \mu = 1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

και είναι το $f(1,1,2) = 2$

ΤΡΟΠΟΣ 2

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να λυθεί ακόμα πιο εύκολα δεδομένου ότι

Από τους πολλαπλασιαστές Lagrange έχουμε $x = y$

Αν προσθέσω και αφαιρέσω κατά μέλη τις δύο περιοριστικές συνθήκες θα έχω

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

και χρησιμοποιώντας την $x = y$ τελικά πιθανό τοπικό ακρότατο έχω για $\left\{ \begin{array}{l} x = y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right\}$

και είναι το $f(1,1,2) = 2$